Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2 Φεβρ. 2016, Ιδιοτιμές

1. Να διαιρέσετε το πολυώνυμο $3x^5 + 2x^4 - 7x + 2$ με το $x^2 + x + 2$.

2. Για καθένα από τα παρακάτω 4 πολυώνυμα βρείτε τις ρίζες και τις αντίστοιχες πολλαπλότητες επί των σωμάτων $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$

   $x^3 - x^2 + 2x - 2, \quad x^2 - 2, \quad x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8, \quad 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2.$

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους των παρακάτω πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   - Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος.
   - Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
   - Βρείτε την m-στή δύναμη A^m του A, για κάθε ακέραιο $m \geq 1$.

5. Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

   διαγωνίσιμος;

6. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και λ ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιόχωρο $V_A(\lambda)$. Ας είναι $\Phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ένα πολυώνυμο. Να αποδειχθεί ότι το $\Phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\Phi(A)$ και ότι

$$V_A(\lambda) \subseteq V_{\Phi(A)}(\Phi(\lambda)).$$

   Ως συνέπεια, δείξτε ότι αν ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος τότε και ο $\Phi(A)$ είναι διαγωνίσιμος. Με ένα παράδειγμα δείξτε ότι εν γένει δεν ισχύει η ισότητα

$$V_A(\lambda) = V_{\Phi(A)}(\Phi(\lambda)).$$

7. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Να δείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

8. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ένας πίνακας τέτοιος ώστε κάθε μη-μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ιδιοδιάνυσμά του. Να δείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $A = \lambda I_n$.

Φυλλάδιο #2

Άσκηση 1

$3x^5+2x^4+0x^3+0x^2-7x+2 \quad | \quad x^2+x+2$

$3x^5+3x^4+6x^3 \quad | \quad 3x^3-x^2-5x+7$

↑ πηλίκο

$0x^5-x^4-6x^3-7x+2$

$-x^4-x^3-2x^2$

$0-5x^3+2x^2-7x+2$

$-5x^3-5x^2-10x$

$7x^2+3x+2$

$7x^2+7x+14$

$-4x-12$ ← υπόλοιπο

άρα $3x^5+2x^4-7x+2=(x^2+x+2)(3x^3-x^2-5x+7)+(-4x-12)$

Ασκηση 2

Q, R, ℂ ρίζες

• $x^3 - x^2 + 2x - 2 = x^2(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x^2+2)$
$= (x-1)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$

Q 1
R 1
ℂ $1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$

όλες έχουν πολλαπλότητα 1

x^2+2

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dots \pm\sqrt{2}$;

$= \pm i\sqrt{2}$

• $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
Q δεν υπάρχει ρίζα
R $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$
ℂ $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ και πολλαπλότητα 1.

• $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$
Έστω $\frac{r}{s} \in Q$ ρίζα του $f(x)$ $r, s \in \mathbb{Z}$ $ΜΚΔ(r,s)=1$
$r|8 \Rightarrow \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$
$s|1 \Rightarrow s=1$
s θετικός

Πιθανές ρητές λύσεις
$\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

$f(1)=0$ $f(4)=$
$f(-1)\neq0$ $f(-4)\neq0$
$f(2)=0$ $f(8)=$
$f(-2)\neq0$ $f(-8)\neq0$

$x-1|f(x)$, $x-2|f(x)$ άρα $(x-1)(x-2)|f(x)$
$f(x) = (x-1)(x-2)$
άρα (πίσω).

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 \quad \Big| \quad x^2 - 3x + 2$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad\qquad x^2 - 4x + 4$$

$$-4x^3 + 16x^2 - 20x + 8$$

$$-4x^3 + 12x^2 - 8x$$

$$4x^2 - 12x + 8$$

$$4x^2 - 12x + 8 \quad \leftarrow \text{υπόλοιπο } 0$$

Άρα $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - 4x + 4)$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4}}{2} = 2$$

άρα $f(x) = (x-1)(x-2)^3$

Q, R, ρ   1 πολλαπλότητα 1

2 πολλαπλότητα 2

Άσκηση 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο
ιδιοτιμές
ιδιοχώρου

εδώ γραμμοπράξεις και όχι σαν A'

$$\cdot\ \chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{r_1 \to r_1 - r_3}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1+x \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 * r_1}{=}$$

$$(1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 4 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\left((x-3)^2 - 4\right) = (1-x)(x-5)(x-1) = (x-1)^2(x-5)$$

$$V_A(1) = \{ X \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid (A - \lambda I)X = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Προκύπτει το σύστημα: $x+y+z=0$ και ο επαυ-

$$2x+2y+2z=0$$
$$x+y+z=0$$

ξημένος πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα $V_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Παράγουν τον χώρο άρα είναι βάση του $V_A(1)$.

$V_A(5) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \middle| (A-5I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2-5 & 1 & 1 \\ 2 & 3-5 & 2 \\ 1 & 1 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{4}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$x+y-3z=0 \qquad x=\alpha$$
$$y-2z=0 \qquad y=2\alpha$$
$$z=\alpha \qquad z=\alpha$$

Άρα:

$$V_A(5)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ άρα Γ.Α.

Συνεπώς βάση του $V_A(5)$ είναι το $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\chi_A(x)=\det(A-xI)$$
$$\chi_f(x)=\det([f]_\alpha^\alpha-xI)\overset{?}{=}\det([f]_\beta^\beta-xI)$$
$$=\det([f-xI]_\alpha^\alpha)$$

$$[f]_\beta^\beta=[I]_\alpha^\beta[f]_\alpha^\alpha[I]_\beta^\alpha$$
$$B=P^{-1}AP$$

$$\det([f]_\beta^\beta-xI)=\det(B-xI)=\det(P^{-1}AP-xI)=$$

$$\det(P^{-1}AP-x\cdot P^{-1}IP)=\det(P^{-1}(A-xI)P)=$$

$$=\det P^{-1}\det(A-xI)\cdot\det P$$
$$=\det P^{-1}\cdot\det P\cdot\det(A-xI)$$
$$=\det(A-xI)$$

Φυλλάδιο #2

Άσκηση 4

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\in R^{3\times3}$$

* Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(x)=\det(A-xI)=\begin{vmatrix}3-x&0&-1\\0&2-x&0\\-1&0&3-x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3-x&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3-x\end{vmatrix}(2-x)=(2-x)\left(0+(-1)^{2+2}\cdot1\begin{vmatrix}3-x&-1\\-1&3-x\end{vmatrix}+0\cdots\right)=$$

$$=(2-x)\left((3-x)^2-1\right)=(2-x)(3-x-1)(3-x+1)=$$

$$=-(x-2)(x-2)(x-4)$$

$$=-(x-2)^2(x-4)$$

Ιδιοτιμές 2 (διπλή), 4 απλή

$$V_A(2)=\{X\in R^{3\times1}\mid AX=2X\}$$

$$=\{X\in R^{3\times1}\mid (A-2I)X=0\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3-2&0&-1&0\\0&2-2&0&0\\-1&0&3-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_1]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, άρα $x+0\cdot y-z=0$

$y=s$

$z=t$ άρα $V_A(2)=\left\{\begin{pmatrix}t\\s\\t\end{pmatrix}\mid t,s\in R\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mid t,s\in R\right\}=$

$x=t$

$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$, Γ.Α άρα είναι βάση.

$V_A(4) = \{ x \in \mathbb{R}^{3\times1} \mid (A-4I)x = 0 \}$

$(A-4I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$(A-4I \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3-4 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2-4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3-4 & 0\end{array}\right) =$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2/-2]{-\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

$x + z = 0 \qquad x = -t$

$y = 0 \qquad y = 0$

$z = t \qquad z = t$

άρα $V_A(4) = \left\{ \begin{pmatrix}-t\\0\\t\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ / Για να ελέγξω αν είναι βάση det...$\neq 0$

$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$ άρα τα $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

είναι Γ.Α. και $3 = \dim \mathbb{R}^{3\times1}$ άρα αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^{3\times1}$.

Άρα υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^{3\times1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα. Συνεπώς ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

ii) Βρείτε πίνακα P έτσι ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.

$$L_A : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad L_A(X) = AX$$

$$[L_A]_\alpha^\alpha = [I]_\varepsilon^\alpha [L_A]_\varepsilon^\varepsilon [I]_\alpha^\varepsilon$$ ε κανονική βάση

ιδιοδιανύσματα $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$P^{-1} A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$A = [LA]_\varepsilon^\varepsilon -$$

$$[LA]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$LA = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = [I]_\alpha^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P^{-1}

$$= [I]_{\mathcal{E}}^{a} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$0 = k - \mu \Rightarrow k = \mu$
$0 = \lambda \Rightarrow \lambda = 0$
$1 = k + \mu \Rightarrow 2k = 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 \end{pmatrix}$$

A^m

$$P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\underset{\underset{A}{\shortparallel}}{I \cdot A \cdot I} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

άρα

$$A^m = \left[P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}\right]^m$$

$$= P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdots P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} =$$

$$= P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^m \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & -4^m \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^{m-1} + \frac{4^m}{2} & 0 & 2^{m-1} - \frac{4^m}{2} \\ 0 & 2^m & 0 \\ 2^{m-1} - \frac{4^m}{2} & 0 & 2^{m-1} + \frac{4^m}{2} \end{pmatrix}$$ (την 5 στο σπίτι)

Άσκηση 7

Έστω λ ιδιοτιμή του AB $X \neq 0_{n\times 1}$ $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$ABX = \lambda X$

$BABX = B\lambda X = \lambda BX$

$BA(BX) = \lambda(BX)$ $\quad BX \neq 0$ ή $BX = 0$

$BX = 0$

$\lambda X = ABX = A \cdot 0 = 0$

- Έστω $\lambda = 0$ $\det(AB - 0I_n) = 0 \Rightarrow \det(AB) = 0 \Leftrightarrow \det A \cdot \det B = 0 \Rightarrow \det B \cdot \det A = 0 \Rightarrow \det(BA) = 0 \Rightarrow \det(BA - 0I_n) = 0 \Rightarrow$ 0 ιδιοτιμή του BA

- Έστω $\lambda \neq 0$ και λ ιδιοτιμή του $AB \Rightarrow$ υπάρχει $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $ABX = \lambda X \Rightarrow$

$BABX = B\lambda X$

$BA(BX) = \lambda BX$ όπου $BX \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ([illegible])

i) $BX \neq 0 \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του BA

ii) $BX = 0 \stackrel{\cdot A}{\Rightarrow} ABX = A0 = 0$

i)
$ABX = 0$
$\lambda X = 0$
$\lambda \neq 0 \quad X \neq 0$ Άτοπο

Άρα κάθε ιδιοτιμή του AB είναι και ιδιοτιμή του BA. Όμοια κάθε ιδιοτιμή του BA είναι και ιδιοτιμή του AB. Δηλαδή οι δύο πίνακες AB, BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

⑥ $A \in K^{n \times n}$ λ ιδιοτιμή του A
$\varphi(x) \in K[x]$ πολυώνυμο
λ ιδιοτιμή του A τότε $\varphi(\lambda)$ ιδιοτιμή του $\varphi(A)$